



## Sur quelques représentations modulaires et $p$ -adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ : I

(On Some Modular Representations and  $p$ -adics of  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ : I)

CHRISTOPHE BREUIL<sup>★</sup>

CNRS et IHES 35, route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France.  
e-mail: breuil@ihes.fr

(Received: 26 June 2001; accepted in final form: 17 June 2002)

**Abstract.** Let  $p$  be a prime number and  $F$  a complete local field with residue field of characteristic  $p$ . In 1993, Barthel and Livné proved the existence of a new kind of  $\bar{\mathbf{F}}_p$ -representations of  $\mathrm{GL}_2(F)$  that they called ‘supersingular’ and on which one knows almost nothing. In this article, we determine all the supersingular representations of  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  with their intertwinings. This classification shows a natural bijection between the set of isomorphism classes of supersingular representations of  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  and the set of isomorphism classes of two-dimensional irreducible  $\bar{\mathbf{F}}_p$ -representations of  $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ .

**Mathematics Subject Classifications (2000).** 11F33, 11F70, 11F80, 11F85.

**Key words.** supersingular representations, intertwinings.

### 1. Introduction

Soit  $p$  un nombre premier,  $F$  un corps local complet pour une valuation discrète de corps résiduel fini de caractéristique  $p$  et  $\bar{F}$  une clôture séparable de  $F$ . Il est maintenant connu que, pour  $\ell \neq p$ , il existe une bijection ‘naturelle’ entre les classes d’isomorphisme de représentations lisses supercuspidales de  $\mathrm{GL}_n(F)$  sur  $\bar{\mathbf{F}}_\ell$  et les classes d’isomorphisme de représentations irréductibles de  $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$  de dimension  $n$  sur  $\bar{\mathbf{F}}_\ell$  [8]. On peut même étendre cette correspondance de façon à inclure les représentations semi-simples de  $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$  de dimension  $n$  [8]. L’étape suivante consiste à regarder le cas  $\ell = p$  et, comme de sérieuses complications sont attendues, à se limiter dans un premier temps à  $\mathrm{GL}_2$  et aux représentations galoisiennes de dimension 2. La classification des représentations semi-simples de dimension 2 de  $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$  sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  à partir des caractères fondamentaux de Serre [7] n’est pas difficile. Il y a quelques années, Barthel et Livné se sont attelés à la tâche de déterminer toutes les représentations lisses irréductibles avec caractère central de  $\mathrm{GL}_2(F)$  sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$ . Outre les caractères (= les représentations de dimension 1), ils ont trouvé des séries principales et des séries spéciales qu’ils ont complètement étudiées, et des représentations d’un type nouveau qu’ils ont appelées ‘supersingulières’ et laissées de côté après avoir

<sup>★</sup>Je remercie Alain Genestier pour de nombreuses discussions durant la gestation de cet article.

démontré qu'elles étaient toutes quotients d'induites compactes quotientées par l'image d'un endomorphisme  $T$  [2] et que leur duale lisse était nulle (résultat non publié de Livné). Le but de cet article est de faire l'étude complète des représentations supersingulières dans le cas particulier, mais important, où  $F = \mathbf{Q}_p$ . Contrairement à la classification des séries principales ou spéciales, celle des représentations supersingulières de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  met alors *clairement* en évidence une correspondance naturelle entre ces représentations et les représentations irréductibles de  $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  de dimension 2 sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$ .

Soit  $Z$  le centre de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ,  $r$  un entier compris entre 0 et  $p - 1$  et  $\mathrm{Sym}^r \bar{\mathbf{F}}_p^{-2}$  la représentation naturelle de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$  (agissant via  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ ) qu'on étend à  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)Z$  en envoyant  $p$  sur l'identité. On note:  $\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)Z}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r \bar{\mathbf{F}}_p^{-2}$  le  $\bar{\mathbf{F}}_p$ -espace vectoriel des fonctions  $f: \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \rightarrow \mathrm{Sym}^r \bar{\mathbf{F}}_p^{-2}$  à support compact modulo  $Z$  telles que  $f(kg) = \mathrm{Sym}^r(k)(f(g))$  ( $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ,  $k \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)Z$ ) muni de l'action à gauche usuelle de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . On peut définir sur cet espace un certain endomorphisme  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant injectif  $T$  (voir §2.6) et considérer, pour  $\lambda \in \bar{\mathbf{F}}_p$  et  $\chi: \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_p^\times$  un caractère lisse, les divers quotients:

$$\pi(r, \lambda, \chi) = \left[ \left( \mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)Z}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r \bar{\mathbf{F}}_p^{-2} \right) / (T - \lambda) \right] \otimes (\chi \circ \det)$$

qui sont lisses et de dimension infinie. Dans [1] et [2], Barthel et Livné ont complètement étudié  $\pi(r, \lambda, \chi)$  lorsque  $\lambda \neq 0$ . On regarde ici le cas  $\lambda = 0$ .

**THÉORÈME 1.1** (cf. Corollaires 4.1.1 et 4.1.4). *Pour  $r \in \{0, \dots, p - 1\}$ , les représentations  $(\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)Z}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r \bar{\mathbf{F}}_p^{-2}) / (T)$  sont irréductibles.*

Il s'ensuit d'après [1] et [2] que les représentations supersingulières de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  sont exactement les représentations  $\pi(r, 0, \chi)$  et que l'on a:

**COROLLAIRE 1.2.** *Les représentations lisses irréductibles de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  ayant un caractère central sont les représentations suivantes:*

- (i) les  $\chi \circ \det$  où  $\chi: \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_p^\times$  est un caractère lisse,
- (ii) les  $\mathrm{Sp} \otimes (\chi \circ \det)$  où  $\chi$  est comme en (i) et  $\mathrm{Sp}$  la représentation 'spéciale' définie dans [1],
- (iii) les  $\pi(r, \lambda, \chi)$  où  $\chi$  est comme en (i),  $r \in \{0, \dots, p - 1\}$  et  $\lambda \in \bar{\mathbf{F}}_p \setminus \{-1, 1\}$ .

Soit  $\omega$  le caractère cyclotomique modulo  $p$  vu comme caractère de  $\mathbf{Q}_p^\times$  via l'isomorphisme de réciprocity (normalisé pour que les uniformisantes correspondent aux Frobenius géométriques), et  $\mu_{-1}$  l'unique caractère quadratique non ramifié de  $\mathbf{Q}_p^\times$ . Contrairement à ce qui se passe lorsque  $\lambda \neq 0$ , les  $\pi(r, 0, \chi)$  admettent entre elles des entrelacements non triviaux:

THÉORÈME 1.3 (cf. Corollaire 4.1.5). *Les équivalences entre les représentations supersingulières de  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$  sont les suivantes ( $r \in \{0, \dots, p - 1\}$  et  $\chi: \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_p^\times$ ):*

$$\begin{aligned} \pi(r, 0, \chi) &\simeq \pi(r, 0, \chi\mu_{-1}) \\ \pi(r, 0, \chi) &\simeq \pi(p - 1 - r, 0, \chi\omega^r) \\ \pi(r, 0, \chi) &\simeq \pi(p - 1 - r, 0, \chi\omega^r\mu_{-1}). \end{aligned}$$

Soit  $\omega_2: I_p \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_p^\times$  le caractère fondamental de Serre de niveau 2 où  $I_p$  est le sous-groupe d'inertie de  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  et notons  $\text{ind}(\omega_2^s)$  pour  $s \in \{0, \dots, p\}$  l'unique représentation (irréductible) de  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  de déterminant  $\omega^s$  et telle que  $\text{ind}(\omega_2^s)|_{I_p} \simeq \omega_2^s \oplus \omega_2^{ps}$ . On sait que, pour  $r \in \{0, \dots, p - 1\}$  et  $\chi: \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_p^\times$ , les représentations  $\rho(r, \chi) = (\text{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \chi$  ont pour déterminant  $\omega^{r+1}\chi^2$  et épuisent les représentations irréductibles de  $G_p$  de dimension 2 sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  avec les isomorphismes:

$$\begin{aligned} \rho(r, \chi) &\simeq \rho(r, \chi\mu_{-1}) \\ \rho(r, \chi) &\simeq \rho(p - 1 - r, \chi\omega^r) \\ \rho(r, \chi) &\simeq \rho(p - 1 - r, \chi\omega^r\mu_{-1}). \end{aligned}$$

On en déduit:

COROLLAIRE 1.4. *Il existe une (unique) bijection entre les classes d'isomorphisme de représentations supersingulières de  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$  et les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  de dimension 2 sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  telle que  $\pi(r, 0, \chi)$  corresponde à  $\rho(r, \chi)$  pour tout  $r \in \{0, \dots, p - 1\}$  et tout caractère  $\chi$ .*

Le résultat clef dont on déduit les deux théorèmes précédents est le calcul des invariants de  $\pi(r, 0, \chi)$  sous le pro- $p$ -sous-groupe du sous-groupe de  $GL_2(\mathbf{Z}_p)$  des matrices triangulaires supérieures modulo  $p$  (Théorème 3.2.4 et Corollaire 4.1.4). Il est obtenu par une récurrence descendante sur le 'diamètre' dans l'arbre de  $SL_2(\mathbf{Q}_p)$  du support modulo  $T$  des fonctions  $f$  relevant de tels invariants. Il utilise de façon essentielle le fait qu'on travaille avec  $\mathbf{Q}_p$  et il est faux sinon (il semble qu'il y ait plus d'invariants en général, cf. remarque finale). Du coup, on peut se demander si les analogues pour  $F \neq \mathbf{Q}_p$  des représentations  $\pi(r, 0, \chi)$  ne sont pas réductibles lorsque  $F \neq \mathbf{Q}_p$  (il faudrait alors étudier leur(s) quotient(s) irréductible(s)). Cela dit, on peut quand même espérer que le Corollaire 1.4 reste toujours vrai, i.e. conjecturer l'existence, pour tout corps  $F$  comme au début, d'une bijection naturelle entre ces quotients irréductibles (i.e. entre les classes d'isomorphisme de représentations supersingulières de  $GL_2(F)$ ) et les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $\text{Gal}(\bar{F}/F)$  de dimension 2 sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$ .

L'article est organisé comme suit: la Section 2 rappelle les notations, formules et résultats nécessaires à la suite, la Section 3 contient deux propositions techniques

mais élémentaires qui permettent de déduire le calcul des invariants de  $\pi(r, 0, \chi)$  sous le pro- $p$ -Iwahori et la dernière section contient les preuves des résultats de cette introduction.

Signalons qu'on peut étendre la correspondance de l'énoncé 1.4 de manière à inclure les représentations semi-simples de dimension 2 de  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  (voir la fin de l'article). La correspondance qu'on obtient est utilisée dans [3] pour prédire la réduction modulo  $p$  de certaines représentations  $p$ -adiques de  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  de dimension 2 sur  $\bar{\mathbf{Q}}_p$ .

Signalons également que depuis la rédaction de cet article, Vignéras a obtenu des résultats de classification sur les modules "supersinguliers" sur l'algèbre de Hecke du pro- $p$ -Iwahori (voir, e.g., [9]).

## 2. Préliminaires

**2.1.** On fixe une clôture algébrique  $\bar{\mathbf{F}}_p$  de  $\mathbf{F}_p$  ainsi qu'un plongement du corps résiduel  $\mathbf{F}$  de  $F$  dans  $\bar{\mathbf{F}}_p$ . On note  $q = p^f$  le cardinal de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers de  $F$ ,  $\varpi$  une uniformisante de  $\mathcal{O}$  et val la valuation  $\varpi$ -adique sur  $F$  normalisée par  $\text{val}(\varpi) = 1$ . On note  $G = \text{GL}_2(F)$ ,  $K = \text{GL}_2(\mathcal{O})$ ,  $I$  le sous-groupe d'Iwahori de  $K$ ,  $I(1)$  le pro- $p$ -sous-groupe de  $I$  et  $Z$  le centre de  $G$ . On a donc:

$$\begin{aligned} I &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \varpi c & d \end{pmatrix}, a \in \mathcal{O}^\times, d \in \mathcal{O}^\times, b \in \mathcal{O}, c \in \mathcal{O} \right\}, \\ I(1) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \varpi c & d \end{pmatrix} \in I, a \equiv d \equiv 1 \pmod{\varpi} \right\}, \\ Z &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in F^\times \right\}. \end{aligned}$$

On note enfin:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que  $\beta$  normalise  $I$  et  $I(1)$  et que l'on a les décompositions de Cartan:

$$G = \coprod_{n \in \mathbf{N}} KZ\alpha^{-n}KZ = \left( \coprod_{n \in \mathbf{N}} IZ\alpha^{-n}KZ \right) \coprod \left( \coprod_{n \in \mathbf{N}} IZ\beta\alpha^{-n}KZ \right). \tag{1}$$

**2.2.** Soit  $\mathcal{A}$  l'arbre de  $\text{SL}_2(F)$  [5]: ses sommets sont en bijection équivariante avec les classes  $G/KZ$  pour l'action à gauche de  $G$ . On pose  $I_0 = \{0\}$  et, si  $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ ,  $I_n = \{[\lambda_0] + \varpi[\lambda_1] + \dots + \varpi^{n-1}[\lambda_{n-1}], \lambda_i \in \mathbf{F}\} \subset \mathcal{O}$  où  $[\cdot]$  désigne le représentant multiplicatif. Pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $\lambda \in I_n$ , on définit:

$$g_{n,\lambda}^0 = \begin{pmatrix} \varpi^n & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{n,\lambda}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi\lambda & \varpi^{n+1} \end{pmatrix}.$$

On a  $g_{0,0}^0 = \text{Id}$ ,  $g_{0,0}^1 = \alpha$  et:

$$\beta g_{n,\lambda}^0 = g_{n,\lambda}^1 w. \tag{2}$$

On a également:

$$IZ\alpha^{-n}KZ = \coprod_{\lambda \in I_n} g_{n,\lambda}^0 KZ \quad \text{et} \quad IZ\beta\alpha^{-n}KZ = \coprod_{\lambda \in I_n} g_{n,\lambda}^1 KZ.$$

D'après (1), les  $g_{n,\lambda}^0$  et  $g_{n,\lambda}^1$  forment donc un système de représentants de  $G/KZ$ :

$$G = \left( \coprod_{n,\lambda} g_{n,\lambda}^0 KZ \right) \amalg \left( \coprod_{n,\lambda} g_{n,\lambda}^1 KZ \right).$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose:

$$\begin{aligned} S_n^0 &= IZ\alpha^{-n}KZ, & S_n^1 &= IZ\beta\alpha^{-n}KZ, \\ B_n^0 &= \coprod_{m \leq n} S_m^0, & B_n^1 &= \coprod_{m \leq n} S_m^1, \\ S_n &= S_n^0 \amalg S_n^1, & B_n &= B_n^0 \amalg B_n^1. \end{aligned}$$

En particulier  $S_0 = KZ \amalg \alpha KZ$ . On peut voir que  $S_n^0 \amalg S_{n-1}^1$  (resp.  $B_n^0 \amalg B_{n-1}^1$ ) est l'ensemble des sommets de  $\mathcal{A}$  de distance  $n$  (resp. inférieure ou égale à  $n$ ) de  $KZ$  pour la distance naturelle sur  $\mathcal{A}$  (cf. [5]). De même  $S_n^1 \amalg S_{n-1}^0$  (resp.  $B_n^1 \amalg B_{n-1}^0$ ) est l'ensemble des sommets de  $\mathcal{A}$  de distance  $n$  (resp. inférieure ou égale à  $n$ ) de  $\alpha KZ$ .

**2.3.** Soit  $\sigma$  une représentation lisse de  $KZ$  sur un  $\bar{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel  $V_\sigma$  de dimension finie. On note  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$  le  $\bar{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel des fonctions  $f$  de  $G$  dans  $V_\sigma$  à support compact modulo  $Z$  telles que  $f(kg) = \sigma(k)(f(g))$  ( $g \in G$ ,  $k \in KZ$ ) muni de l'action à gauche de  $G$ :  $(gf)(g') = f(g'g)$ . Ces fonctions sont automatiquement (uniformément) localement constantes. Comme dans [2], pour  $g \in G$  et  $v \in V_\sigma$  on note  $[g, v]$  l'élément de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$  défini comme suit:

$$\begin{aligned} [g, v](g') &= \sigma(g'g) \cdot v & \text{si } g' \in KZg^{-1}, \\ [g, v](g') &= 0, & \text{si } g' \notin KZg^{-1}. \end{aligned}$$

On a  $g([g', v]) = [gg', v]$  et  $[gk, v] = [g, \sigma(k)v]$  si  $k \in KZ$ . De plus, tout élément de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$  s'écrit comme une somme finie  $\sum_i [g_i, v_i]$  où  $g_i \in G$  et  $v_i \in V_\sigma$  [2]. D'après le §2.2, on peut toujours prendre les  $g_i$  distincts dans  $\{g_{n,\lambda}^0, n \in \mathbb{N}, \lambda \in I_n\} \cup \{g_{n,\lambda}^1, n \in \mathbb{N}, \lambda \in I_n\}$ . L'écriture  $\sum_i [g_i, v_i]$  précédente est alors unique. Soit  $f \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma$ , on appelle support de  $f$  l'ensemble des sommets  $gKZ \in \mathcal{A}$  tels que  $f(g^{-1}) \neq 0$  (c'est indépendant du représentant  $g$  choisi). On écrit  $f \in S_n$  (resp.  $B_n$ , resp.  $S_n^0$ , resp.  $S_n + S_{n-1}$ , etc.) si le support de  $f$  est contenu dans  $S_n$  (resp.  $B_n$ , resp.  $S_n^0$ , resp.  $S_n \amalg S_{n-1}$ , etc.). Dans ce cas, on peut écrire  $f = \sum [g_i, v_i]$  avec  $v_i = 0$  si  $g_i KZ \notin S_n$  (resp.  $B_n$ , resp.  $S_n^0$ , resp.  $S_n \amalg S_{n-1}$ , etc.).

**2.4.** L’algèbre de Hecke relativement à  $KZ$  et  $\sigma$  est par définition  $\text{End}_G(\text{ind}_{KZ}^G \sigma)$ . Par réciprocity de Frobenius, elle s’identifie à l’algèbre de convolution des fonctions  $\varphi: G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}_p}(V_\sigma)$  à support compact modulo  $Z$  telles que:

$$\varphi(k_1 g k_2) = \sigma(k_1) \circ \varphi(g) \circ \sigma(k_2)$$

pour  $k_1, k_2 \in KZ$  et  $g \in G$  [2]. Soit  $\varphi$  une telle fonction,  $T$  l’endomorphisme correspondant de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$ ,  $g \in G$ ,  $v \in V_\sigma$  et  $[g, v]$  l’élément défini au § 2.3. Alors on a la formule (cf. [2]):

$$T([g, v]) = \sum_{g' \in KZ \backslash G / KZ} [gg', \varphi(g'^{-1})(v)]. \tag{3}$$

On écrit  $T(S_n)$  (resp.  $T(S_n) + T(S_{n-1})$ , etc.) pour désigner le sous- $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel des fonctions  $T(f)$  avec  $f$  à support dans  $S_n$  (resp.  $S_n \amalg S_{n-1}$ , etc.).

**2.5.** On suppose maintenant que le support de  $\varphi$  dans  $G$  est  $KZ\alpha^{-1}KZ = KZ\alpha KZ$  et on pose, pour  $\lambda \in \mathcal{O}$ ,  $w_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \in K$ . On a  $KZ\alpha KZ = (\amalg_{\lambda \in I_1} g_{1,\lambda}^0 KZ) \amalg \alpha KZ$  (cf. §2.2) et  $(g_{1,\lambda}^0)^{-1} = w\alpha^{-1}w_\lambda$  ( $\lambda \in I_1$ ). On déduit alors de la formule (3):

$$T([g, v]) = \sum_{\lambda \in I_1} [gg_{1,\lambda}^0, \sigma(w)\varphi(\alpha^{-1})\sigma(w_\lambda)(v)] + [g\alpha, \varphi(\alpha^{-1})(v)]. \tag{4}$$

Pour  $0 \leq m \leq n$ , soit  $[\ ]_m: I_n \rightarrow I_m$  les applications ‘troncatures’ qui envoient  $\sum_{i=0}^{n-1} \varpi^i[\lambda_i]$  sur  $\sum_{i=0}^{m-1} \varpi^i[\lambda_i]$  si  $m \geq 1$  et sur 0 si  $m = 0$ . Notons que, si  $\lambda \in I_n$  et  $\lambda' \in I_{n'}$ , alors  $\lambda + \varpi^n \lambda' \in I_{n+n'}$  et  $\lambda' + \varpi^{n'} \lambda \in I_{n+n'}$ . Dans le système de représentants du §2.2, la formule (4) s’explique comme suit:

Si  $n \geq 1$  et  $\mu \in I_n$ :

$$\begin{aligned} T([g_{n,\mu}^0, v]) &= \sum_{\lambda \in I_1} [g_{n+1,\mu+\varpi^n \lambda}^0, \sigma(w)\varphi(\alpha^{-1})\sigma(w_\lambda)(v)] + \\ &+ [g_{n-1, [\mu]_{n-1}}^0, \sigma(w w_{\frac{[\mu]_{n-1}-\mu}{\varpi^{n-1}}})\varphi(\alpha^{-1})(v)], \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} T([g_{n,\mu}^1, v]) &= \sum_{\lambda \in I_1} [g_{n+1,\mu+\varpi^n \lambda}^1, \varphi(\alpha^{-1})\sigma(w_\lambda w)(v)] + \\ &+ [g_{n-1, [\mu]_{n-1}}^1, \sigma(w_{\frac{[\mu]_{n-1}-\mu}{\varpi^{n-1}}})\varphi(\alpha^{-1})\sigma(w)(v)]. \end{aligned} \tag{6}$$

Si  $n = 0$ :

$$T([\text{Id}, v]) = \sum_{\lambda \in I_1} [g_{1,\lambda}^0, \sigma(w)\varphi(\alpha^{-1})\sigma(w_\lambda)(v)] + [\alpha, \varphi(\alpha^{-1})(v)], \tag{7}$$

$$T([\alpha, v]) = \sum_{\lambda \in I_1} [g_{1,\lambda}^1, \varphi(\alpha^{-1})\sigma(w_\lambda w)(v)] + [\text{Id}, \sigma(w)\varphi(\alpha^{-1})\sigma(w)(v)]. \tag{8}$$

Bien sûr on passe des formules pour  $g_{n,\mu}^0$  à celles pour  $g_{n,\mu}^1$  en appliquant  $\beta$  des deux côtés du signe = puis en utilisant la formule (2) et le fait que  $w^2 = \text{Id}$ .

**2.6.** On suppose maintenant que  $\sigma$  est l'une des représentations  $\sigma_{\vec{r}}$  suivantes:  $\vec{r} = (r_1, \dots, r_f) \in \{0, \dots, p-1\}^f$  et  $\sigma_{\vec{r}}$  est l'unique représentation de  $KZ$  dont l'espace sous-jacent est:

$$V_{\sigma_{\vec{r}}} = (\text{Sym}^{r_1} \bar{\mathbf{F}}_p^2) \otimes_{\bar{\mathbf{F}}_p} (\text{Sym}^{r_2} \bar{\mathbf{F}}_p^2) \otimes_{\bar{\mathbf{F}}_p} \cdots \otimes_{\bar{\mathbf{F}}_p} (\text{Sym}^{r_f} \bar{\mathbf{F}}_p^2)$$

telle que  $\sigma_{\vec{r}} \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} = \text{Id}$  et, si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K$ :

$$\sigma_{\vec{r}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} v_1 \otimes \begin{pmatrix} a^p & b^p \\ c^p & d^p \end{pmatrix} v_2 \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} a^q & b^q \\ c^q & d^q \end{pmatrix} v_f$$

où  $K$  agit sur  $\text{Sym}^{r_j} \bar{\mathbf{F}}_p^2$  via l'action naturelle de  $GL_2(\mathbf{F})$  sur  $\bar{\mathbf{F}}_p^2$  (noter que la définition des  $\sigma_{\vec{r}}$  fait intervenir le choix de  $\varpi$ ). A torsion près par les caractères, les  $\sigma_{\vec{r}}$  donnent toutes les représentations lisses irréductibles de dimension finie de  $KZ$  sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  [2]. On identifiera dans la suite  $\text{Sym}^{r_j} \bar{\mathbf{F}}_p^2$  avec le  $\bar{\mathbf{F}}_p$ -espace vectoriel  $\bigoplus_{i=0}^{r_j} \bar{\mathbf{F}}_p x_j^{r_j-i} y_j^i$  des polynômes homogènes de degré  $r_j$  en les variables  $x_j$  et  $y_j$  avec l'action à gauche de  $K$  donnée par:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x_j^{r_j-i} y_j^i = (ax_j + cy_j)^{r_j-i} (bx_j + dy_j)^i.$$

**2.7.** D'après [2], il existe une unique fonction  $\varphi: G \rightarrow \text{End}_{\bar{\mathbf{F}}_p}(V_{\sigma_{\vec{r}}})$  à support dans  $KZ\alpha^{-1}KZ$  telle que  $\varphi(k_1\alpha^{-1}k_2) = \sigma_{\vec{r}}(k_1) \circ \varphi(\alpha^{-1}) \circ \sigma_{\vec{r}}(k_2)$  ( $k_1, k_2 \in KZ, g \in G$ ) et  $\varphi(\alpha^{-1}) = U_{r_1} \otimes \cdots \otimes U_{r_f}$  où  $U_{r_j} \in \text{End}_{\bar{\mathbf{F}}_p}(\text{Sym}^{r_j} \bar{\mathbf{F}}_p^2)$  est défini par  $U_{r_j}(x_j^{r_j-i} y_j^i) = 0$  si  $i \neq r_j$  et  $U_{r_j}(y_j^{r_j}) = y_j^{r_j}$ . On note  $T$  l'opérateur de Hecke correspondant (cf. § 2.5) et, pour  $\lambda \in \bar{\mathbf{F}}_p$ ,  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}} / (T - \lambda)$  la représentation conoyau du morphisme  $G$ -équivariant injectif  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}} \xrightarrow{T-\lambda} \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}}$ . On note aussi, comme dans [2],  $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ ,  $\vec{p} - \vec{1} = (p-1, \dots, p-1)$  et  $\mu_\lambda: F^\times \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_p^\times$  le caractère non ramifié  $\mu_\lambda(x) = \lambda^{\text{val}(x)}$  ( $\lambda \in \bar{\mathbf{F}}_p^\times$ ). Le théorème suivant résume une partie des résultats de [1] et [2]:

**THÉORÈME 2.7.1.** Soit  $\vec{r} \in \{0, \dots, p-1\}^f$  et  $\chi: F^\times \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_p^\times$  un caractère lisse.

- (i) Tout quotient irréductible de  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}}) \otimes (\chi \circ \det)$  est un quotient (irréductible) de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}} / (T - \lambda) \otimes (\chi \circ \det)$  pour un certain  $\lambda \in \bar{\mathbf{F}}_p$ .
- (ii) Si  $\lambda \in \bar{\mathbf{F}}_p^\times$ , alors  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}} / (T - \lambda) \otimes (\chi \circ \det)$  est irréductible si et seulement si  $(\vec{r}, \lambda) \notin \{(\vec{0}, \pm 1), (\vec{p} - \vec{1}, \pm 1)\}$ .
- (iii) Si  $(\vec{r}, \lambda) \in \{(\vec{0}, \pm 1), (\vec{p} - \vec{1}, \pm 1)\}$ , alors  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}} / (T - \lambda) \otimes (\chi \circ \det)$  est de longueur 2, de semi-simplifiée isomorphe à  $(\chi\mu_\lambda \circ \det) \oplus (\text{Sp} \otimes (\chi\mu_\lambda \circ \det))$  où  $\text{Sp}$  est une représentation lisse irréductible de  $G$  appelée représentation 'spéciale'.

(iv) Les seules équivalences entre les représentations irréductibles en (ii) et (iii) sont les suivantes:  $(\vec{r}, \lambda) \notin \{(\vec{0}, \pm 1), (\vec{p} - \vec{1}, \pm 1)\}$  (avec  $\lambda \in \bar{\mathbf{F}}_p^\times$ ) et:

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}}}{(T - \lambda)} \otimes (\chi \circ \text{dét}) \simeq \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}}}{(T + \lambda)} \otimes (\chi \mu_{-1} \circ \text{dét}),$$

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{p} - \vec{1}}}{(T - \lambda)} \otimes (\chi \circ \text{dét}) \simeq \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{0}}}{(T - \lambda)} \otimes (\chi \circ \text{dét}).$$

(v) Il n'y a pas d'équivalences entre les représentations irréductibles en (ii) et (iii) et les quotients irréductibles de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}} / (T) \otimes (\chi \circ \text{dét})$  pour toutes valeurs de  $\vec{r}$  et  $\chi$ .

DÉFINITION 2.7.2 ([2]). (i) On appelle séries spéciales les représentations

$$\text{Sp} \otimes (\chi \circ \text{dét}).$$

(ii) On appelle séries principales les représentations  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}} / (T - \lambda) \otimes (\chi \circ \text{dét})$  pour  $\lambda \in \bar{\mathbf{F}}_p^\times$  et  $(\vec{r}, \lambda) \notin \{(\vec{0}, \pm 1), (\vec{p} - \vec{1}, \pm 1)\}$ .

(iii) On appelle représentations supersingulières les quotients irréductibles de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}} / (T) \otimes (\chi \circ \text{dét})$  pour  $\vec{r} \in \{0, \dots, p - 1\}^f$ .

Dans [2], il est également démontré que toute représentation lisse irréductible de  $G$  sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  admettant un caractère central est soit un caractère, soit une série spéciale, soit une série principale, soit une représentation supersingulière. En dehors du cas  $F = \mathbf{Q}_p$  qui fait l'objet de cet article, rien n'est connu (outre leur existence [2]) sur les quotients irréductibles de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{\vec{r}} / (T)$ .

### 3. Invariants Sous Le Pro- $p$ -Iwahori

On suppose maintenant  $F = \mathbf{Q}_p$  et  $\varpi = p$ . On fixe  $r \in \{0, \dots, p - 1\}$  et on note  $\sigma_r$  au lieu de  $\sigma_{\vec{r}}$  la représentation de  $KZ$  définie au §2.6. On identifie  $V_{\sigma_r} = \text{Sym}^r \bar{\mathbf{F}}_p^2$  à  $\bigoplus_{i=0}^r \bar{\mathbf{F}}_p x^{r-i} y^i$  comme au §2.6. On note également  $\varphi$  la fonction définie au §2.7 et  $T$  l'opérateur de Hecke associé. Dans la base  $(x^{r-i} y^i)_{0 \leq i \leq r}$ ,  $\varphi(\alpha^{-1})$  est donc donné par la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### 3.1.

LEMME 3.1.1. Soit  $v = \sum_{i=0}^r c_i x^{r-i} y^i \in \text{Sym}^r \bar{\mathbf{F}}_p^2$  et  $\lambda \in I_1$ , on a:



$$\sigma_r(w)\varphi(\alpha^{-1})\sigma_r(w_\lambda)(v) = \left(\sum_{i=0}^r c_i(-\lambda)^i\right)x^r, \tag{9}$$

$$\varphi(\alpha^{-1})\sigma_r(w_\lambda w)(v) = \left(\sum_{i=0}^r c_i(-\lambda)^{r-i}\right)y^r. \tag{10}$$

*Démonstration.* Calcul. □

**COROLLAIRE 3.1.2.** *Soit  $v \in \text{Sym}^r \bar{\mathbf{F}}_p^2$  tel que  $\sigma_r(w)\varphi(\alpha^{-1})\sigma_r(w_\lambda)(v) = 0$  (resp.  $\varphi(\alpha^{-1})\sigma_r(w_\lambda w)(v) = 0$ ) pour tout  $\lambda \in I_1$ , alors  $v = 0$ .*

*Démonstration.* On utilise 3.1.1 et le fait que, pour  $0 \leq r \leq p - 1$ , la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^r \end{pmatrix}$$

est inversible modulo  $p$ . On peut aussi dire qu'un polynôme de degré  $\leq p - 1$  qui a  $p$  zéros est nul. □

**COROLLAIRE 3.1.3.** *La représentation  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r / (T)$  est de dimension infinie.*

*Démonstration.* Sinon, il existe  $N \gg 0$  tel que tout  $f \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_r$  est dans  $B_N + T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r)$ . Considérant  $f = [g_{n,0}^0, y^r]$  pour  $n > N$ , on a  $f - T(h) \in B_N$  pour un  $h \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_r$ . Par les formules du §2.5 et le Corollaire 3.1.2, cela entraîne que  $h$  doit être à support dans  $B_{n-1}$  et que les termes de  $f - T(h)$  à support dans  $B_n$  doivent tous être nuls. Un examen des formules (5) et (9) montre que cela est impossible. □

*Remarque 3.1.4.* Dans [2], il est démontré que  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r$ , en tant que  $\bar{\mathbf{F}}_p[T]$ -module, est libre de rang infini, d'où en particulier le corollaire ci-dessus.

**LEMME 3.1.5.** *Soit  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ ,  $\mu \in I_{n-1}$ ,  $c(X) \in \bar{\mathbf{F}}_p[X]$  de degré  $\leq r$  et posons  $S_{-1}^0 = S_0^1$  et  $S_{-1}^1 = S_0^0$ , alors:*

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in I_1} c(\lambda)[g_{n,\mu+p^{n-1}\lambda}^0, x^r] &\in T(S_{n-1}^0) + S_{n-2}^0, \\ \sum_{\lambda \in I_1} c(\lambda)[g_{n,\mu+p^{n-1}\lambda}^1, y^r] &\in T(S_{n-1}^1) + S_{n-2}^1. \end{aligned}$$

*Démonstration.* La deuxième assertion se déduit de la première en appliquant  $\beta$ . Si  $c(X) = \sum_{i=0}^r c_i X^i$ , alors, on vérifie à partir des formules (5), (7) et (9) que:

$$\sum_{\lambda \in I_1} [g_{n,\mu+p^{n-1}\lambda}^0, c(\lambda)x^r] - T\left(g_{n-1,\mu}^0, \sum_{i=0}^r c_i(-1)^i x^{r-i} y^i\right) \in S_{n-2}^0$$

d'où le résultat. □

LEMME 3.1.6. *Soit  $f: \mathbf{F}_p \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_p$  une application quelconque. Alors il existe un unique polynôme  $c(X) \in \bar{\mathbf{F}}_p[X]$  de degré inférieur ou égal à  $p - 1$  tel que  $c(\lambda) = f(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \mathbf{F}_p$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de trouver  $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \bar{\mathbf{F}}_p^p$  tel que:

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i \lambda^i = f(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbf{F}_p.$$

L'existence et l'unicité découlent du fait que la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & p-1 & (p-1)^2 & \dots & (p-1)^{p-1} \end{pmatrix}$$

est inversible modulo  $p$ . □

LEMME 3.1.7. *Soit  $i \in \{0, \dots, p - 1\}$ . On a:*

$$\sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} \lambda^i = 0 \quad \text{si } i \neq p - 1,$$

$$\sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} \lambda^i = -1 \quad \text{si } i = p - 1.$$

*Démonstration.* Triviale. □

LEMME 3.1.8. *Soit  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{F}_p^3$ , alors:*

$$[\lambda_0] + p[\lambda_1] + p^2[\lambda_2] + 1$$

$$\equiv [\lambda_0 + 1] + p\left[\lambda_1 + \frac{\lambda_0^p + 1 - (\lambda_0 + 1)^p}{p}\right] + p^2[\lambda_2 + P_{\lambda_0}(\lambda_1)] \pmod{p^3}$$

où  $P_{\lambda_0}(X)$  est un polynôme de degré  $p - 1$  et de coefficient dominant  $-(\lambda_0^p + 1 - (\lambda_0 + 1)^p)/p$ .

*Démonstration.* Calcul sur les vecteurs de Witt  $W(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$ . Voir [6] par exemple.  $\square$

**3.2.** On définit  $X_0^0 = [\text{Id}, x^r]$ ,  $X_0^1 = [\alpha, y^r]$  et, si  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ :

$$X_n^0 = \sum_{\mu \in I_{n-1}} \sum_{\lambda \in I_1} \lambda^{r+1} [g_{n,\mu+p^{n-1}\lambda}^0, x^r],$$

$$X_n^1 = \sum_{\mu \in I_{n-1}} \sum_{\lambda \in I_1} \lambda^{r+1} [g_{n,\mu+p^{n-1}\lambda}^1, y^r].$$

On a  $X_n^0 \in S_n^0$ ,  $X_n^1 \in S_n^1$  et  $\beta X_n^0 = X_n^1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in KZ$  et  $v \in \text{Sym}^r \bar{\mathbb{F}}_p^2$ , on écrit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} v$  pour  $\sigma_r \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (v)$ .

**PROPOSITION 3.2.1.** *Supposons  $r \leq p - 2$  et convenons que  $S_{-1}^0 = S_0^1$ ,  $S_{-1}^1 = S_0^0$  et  $S_{-1} = S_0$ . Soit  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  et  $f_n$  un élément de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r$  tel que  $f_n \in S_n$  et  $gf_n - f_n \in T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r) + B_{n-1} \forall g \in I(1)$ . On a alors:*

- (i)  $gf_n - f_n \in T(S_{n-1}) + S_{n-2} \forall g \in I(1)$
- (ii) *il existe  $(c^0, c^1) \in \bar{\mathbb{F}}_p^2$  tels que  $f_n - c^0 X_n^0 - c^1 X_n^1 \in T(S_{n-1}) + S_{n-2}$ .*

*Démonstration.* (i) Comme  $gf_n - f_n \in S_n$  pour  $g \in I(1)$ , en regardant les supports des fonctions et d'après le corollaire 3.1.2 et les formules du §2.5, on voit qu'on doit avoir  $gf_n - f_n \in T(B_{n-1}) + B_{n-1}$  pour tout  $g \in I(1)$ . Comme  $T(B_{n-2}) \subset B_{n-1}$  si  $n \geq 2$ , on a  $gf_n - f_n \in T(S_{n-1}) + B_{n-1}$ . En regardant encore les supports, cela entraîne  $gf_n - f_n \in T(S_{n-1}) + S_{n-2}$ .

(ii) On écrit  $f_n = f_n^0 + f_n^1$  où  $f_n^0$  est à support dans  $S_n^0$  et  $f_n^1$  à support dans  $S_n^1$ . Comme  $I(1)$  préserve  $S_n^0$  et  $S_n^1$ ,  $T(S_{n-1}^0) \subset S_n^0 \cup S_{n-2}^0$  et  $T(S_{n-1}^1) \subset S_n^1 \cup S_{n-2}^1$ , on a  $gf_n^0 - f_n^0 \in T(S_{n-1}^0) + S_{n-2}^0$  et  $gf_n^1 - f_n^1 \in T(S_{n-1}^1) + S_{n-2}^1$  pour tout  $g \in I(1)$ . Il suffit donc de montrer  $f_n^0 - c^0 X_n^0 \in T(S_{n-1}^0) + S_{n-2}^0$  pour un  $c^0 \in \bar{\mathbb{F}}_p$ , l'égalité analogue pour  $f_n^1$  s'en déduisant par le même raisonnement appliqué à  $\beta^{-1} f_n^1$  en remarquant que  $\beta^{-1}$  normalise  $I(1)$ . On écrit donc  $f_n^0 = \sum_{\lambda \in I_n} [g_{n,\lambda}^0, v_\lambda]$  où  $v_\lambda \in \text{Sym}^r \bar{\mathbb{F}}_p^2$ . Un calcul donne (en utilisant 3.1.8):

$$\begin{pmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [g_{n,\lambda}^0, v_\lambda] - [g_{n,\lambda}^0, v_\lambda] = \left[ g_{n,\lambda}^0, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_\lambda - v_\lambda \right],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & p^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [g_{n,\lambda}^0, v_\lambda] - [g_{n,\lambda+1}^0, v_{\lambda+1}]$$

$$= \left[ g_{n,\lambda+1}^0, \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_{n-1}^p + 1 - (\lambda_{n-1} + 1)^p}{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_\lambda - v_{\lambda+1} \right]$$

où:

$$\lambda_{+1} = [\lambda_0] + p[\lambda_1] + \dots + p^{n-1}[\lambda_{n-1} + 1]$$

si:

$$\lambda = [\lambda_0] + p[\lambda_1] + \dots + p^{n-1}[\lambda_{n-1}] \quad (\lambda_i \in \mathbf{F}_p).$$

D'après 3.1.1 et l'hypothèse, on doit donc avoir pour tout  $\lambda \in I_n$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_\lambda - v_\lambda \in \bar{\mathbf{F}}_p x^r, \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_{n-1}^p + 1 - (\lambda_{n-1} + 1)^p}{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_\lambda - v_{\lambda_{+1}} \in \bar{\mathbf{F}}_p x^r. \tag{12}$$

L'égalité (11) entraîne  $v_\lambda \in \bar{\mathbf{F}}_p x^r + \bar{\mathbf{F}}_p x^{r-1} y$  et, en notant  $v_\lambda = c_\lambda x^r + d_\lambda x^{r-1} y$ , l'égalité (12) entraîne:

$$\left( c_\lambda - c_{\lambda_{+1}} + d_\lambda \frac{\lambda_{n-1}^p + 1 - (\lambda_{n-1} + 1)^p}{p} \right) x^r + (d_\lambda - d_{\lambda_{+1}}) x^{r-1} y \in \bar{\mathbf{F}}_p x^r.$$

Donc  $d_\lambda - d_{\lambda_{+1}} = 0$  et  $d_\lambda$  ne dépend que de  $[\lambda]_{n-1}$  et pas de  $\lambda_{n-1}$ . Fixons  $[\lambda]_{n-1}$  et notons  $d_\lambda = d_{[\lambda]_{n-1}}$  et  $c_\lambda = c_{[\lambda]_{n-1}}(\lambda_{n-1})$  que l'on voit comme un polynôme en  $\lambda_{n-1}$  de degré  $\leq p - 1$  par le Lemme 3.1.6. Les formules (5), (9) et le calcul précédent montrent que:

$$c_{[\lambda]_{n-1}}(\lambda_{n-1}) - c_{[\lambda]_{n-1}}(\lambda_{n-1} + 1) + d_{[\lambda]_{n-1}} \frac{\lambda_{n-1}^p + 1 - (\lambda_{n-1} + 1)^p}{p}$$

est un polynôme en  $\lambda_{n-1}$  de degré  $r$ . Comme  $c_{[\lambda]_{n-1}}(\lambda_{n-1}) - c_{[\lambda]_{n-1}}(\lambda_{n-1} + 1)$  est un polynôme en  $\lambda_{n-1}$  de degré  $\leq p - 2$  et comme  $r \leq p - 2$ :

$$d_{[\lambda]_{n-1}} \frac{\lambda_{n-1}^p + 1 - (\lambda_{n-1} + 1)^p}{p}$$

doit être aussi de degré  $\leq p - 2$ , ce qui oblige  $d_{[\lambda]_{n-1}} = 0$ . Donc  $c_{[\lambda]_{n-1}}(\lambda_{n-1}) - c_{[\lambda]_{n-1}}(\lambda_{n-1} + 1)$  doit être de degré  $\leq r$ , ce qui force  $c_{[\lambda]_{n-1}}(\lambda_{n-1})$  de degré  $\leq r + 1$ . Changeant de notations, on peut donc écrire:

$$f_n^0 = \sum_{\mu \in I_{n-1}} \sum_{\lambda \in I_1} [g_{n,\mu+p^{n-1}\lambda}^0, c_\mu(\lambda) x^r]$$

avec  $c_\mu(X) \in \bar{\mathbb{F}}_p[X]$  de degré  $\leq r + 1$ . Modulo  $T(S_{n-1}^0) + S_{n-2}^0$ , on peut supposer  $c_\mu(\lambda) = c_\mu \lambda^{r+1}$  par le Lemme 3.1.5 où  $c_\mu \in \bar{\mathbb{F}}_p$  ne dépend que de  $\mu$ . Donc:

$$f_n^0 - \sum_{\mu \in I_{n-1}} c_\mu \sum_{\lambda \in I_1} \lambda^{r+1} [g_{n,\mu+p^{n-1}\lambda}^0, x^r] \in T(S_{n-1}^0) + S_{n-2}^0$$

et on peut remplacer  $f_n^0$  par la double somme. Il reste à montrer que  $c_\mu$  est indépendant de  $\mu$ . Soit  $\mu \in I_{n-1}$ , les termes dans  $\binom{1}{0} \binom{\mu}{1} f_n^0 - f_n^0$  à support dans les classes  $KZ(g_{n,\mu+p^{n-1}\lambda}^0)^{-1}$  pour  $\lambda \in I_1$  sont:

$$(c_0 - c_\mu) \sum_{\lambda \in I_1} \lambda^{r+1} [g_{n,\mu+p^{n-1}\lambda}^0, x^r].$$

Mais la condition  $\binom{1}{0} \binom{\mu}{1} f_n^0 - f_n^0 \in T(S_{n-1}^0) + S_{n-2}^0$  entraîne (formules (5) et (9)) que  $(c_0 - c_\mu) \lambda^{r+1}$  est de degré  $r$  en  $\lambda$ , ce qui force  $c_0 = c_\mu$ . Comme ceci doit être vrai pour tout  $\mu \in I_{n-1}$ , on voit que la constante  $c^0 = c_\mu$  convient.  $\square$

*Remarque 3.2.2.* Pour  $r = p - 1$ , il y a un énoncé analogue à 3.2.1 à condition de remplacer  $X_n^0$  (resp.  $X_n^1$ ) par  $\sum_{\lambda \in I_n} [g_{n,\lambda}^0, x^{p-2}y]$  (resp.  $\sum_{\lambda \in I_n} [g_{n,\lambda}^1, xy^{p-2}]$ ). Nous n'en aurons pas besoin.

**PROPOSITION 3.2.3.** *Supposons  $r \leq p - 2$  et soit  $f \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_r$  tel que  $gf - f \in T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r)$  pour tout  $g \in I(1)$ , alors  $f \in T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r) + B_1$ .*

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$  maximal tel que  $S_n \cap \text{Supp}(f) \neq \emptyset$ . On suppose  $n \geq 2$  sinon c'est fini et on traite d'abord le cas  $n \geq 3$ . On écrit  $f = \sum_{i=0}^n f_i$  où  $f_i$  est à support dans  $S_i$ . On a:

$$g(f_n) - f_n + g(f_{n-1}) - f_{n-1} + g(f_{n-2}) - f_{n-2} \in T(B_{n-1}) + B_{n-3}.$$

En examinant les supports, on voit que  $g(f_n) - f_n \in T(B_{n-1}) + B_{n-1}$  et  $g(f_{n-1}) - f_{n-1} \in T(B_{n-2}) + B_{n-2}$  pour tout  $g \in I(1)$ . Par le (ii) de la Proposition 3.2.1 appliqué à  $f_n$ , quitte à modifier  $f_{n-2}$ , on peut supposer  $f_n = c^0 X_n^0 + c^1 X_n^1$ . Par le (i) de la Proposition 3.2.1 appliqué à  $f_{n-1}$ , on a  $g(f_{n-1}) - f_{n-1} \in T(S_{n-2}) + S_{n-3}$ , d'où:

$$g(f_n) - f_n + g(f_{n-2}) - f_{n-2} \in T(B_{n-1}) + B_{n-3}. \tag{13}$$

Soit  $\lambda = [\lambda_0] + p[\lambda_1] + \dots + p^{n-1}[\lambda_{n-1}] \in I_n$ , un calcul donne:

$$\begin{pmatrix} 1 & p^{n-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_{n,\lambda}^0 = g_{n,\tilde{\lambda}}^0 \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $*$   $\in \mathbb{Z}_p$  et:

$$\tilde{\lambda} = [\lambda_0] + p[\lambda_1] + \dots + p^{n-2}[\lambda_{n-2} + 1] + p^{n-1} \left[ \lambda_{n-1} + \frac{\lambda_{n-2}^p + 1 - (\lambda_{n-2} + 1)^p}{p} \right]$$

(cf. Lemme 3.1.8). D'où, en changeant de notation:

$$\begin{pmatrix} 1 & p^{n-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_n^0 - X_n^0 = \sum_{\mu \in I_{n-1}} \sum_{\lambda \in I_1} c_\mu(\lambda) [g_{n, \mu + p^{n-1}\lambda}^0, x^r]$$

où:

$$c_\mu(X) = \left( X - \frac{(\mu_{n-2} - 1)^p + 1 - \mu_{n-2}^p}{p} \right)^{r+1} - X^{r+1} \in \mathbf{F}_p[X]$$

si  $\mu = [\mu_0] + p[\mu_1] + \dots + p^{n-2}[\mu_{n-2}]$ . On déduit des formules (5), (9) et du Lemme 3.1.7:

$$\begin{pmatrix} 1 & p^{n-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_n^0 - X_n^0 - Y \in T(S_{n-1}^0)$$

où:

$$\begin{aligned} Y &= (-1)^r(r+1) \sum_{\mu \in I_{n-1}} \frac{(\mu_{n-2} - 1)^p + 1 - \mu_{n-2}^p}{p} [g_{n-2, [\mu]_{n-2}}^0, (\mu_{n-2}x + y)^r] \\ &= (-1)^r(r+1) \sum_{\mu \in I_{n-2}} \left[ g_{n-2, \mu}^0, \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} \frac{(\lambda - 1)^p + 1 - \lambda^p}{p} (\lambda x + y)^r \right], \\ &= (-1)^r(r+1) \sum_{\mu \in I_{n-2}} [g_{n-2, \mu}^0, y^r + x(*)], \end{aligned} \tag{14}$$

\* étant un polynôme homogène en  $x$  et  $y$  de degré  $r - 1$  (nul si  $r = 0$ ). On a donc, en appliquant (13) à  $g = \begin{pmatrix} 1 & p^{n-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ :

$$c^0 Y + \begin{pmatrix} 1 & p^{n-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_{n-2} - f_{n-2} \in T(B_{n-1}) + B_{n-3} + S_n^1.$$

Un examen des supports montre (via le Corollaire 3.1.2) qu'on a en fait:

$$c^0 Y + \begin{pmatrix} 1 & p^{n-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_{n-2} - f_{n-2} \in T(S_{n-1}^1) + T(B_{n-3}) + B_{n-3} + S_n^1.$$

Les termes à support dans les classes  $KZ(g_{n-2, \mu}^0)^{-1}$  ( $\mu \in I_{n-2}$ ) qui apparaissent dans le membre de droite proviennent de  $T(S_{n-3}^0) \subset T(B_{n-3})$ . Les formules (5) et (8) (avec le Lemme 3.1.1) montrent qu'ils sont somme de  $[g_{n-2, \mu}^0, v_\mu]$  pour des  $v_\mu$  dans  $\bar{\mathbf{F}}_p x^r$ . Pour le membre de gauche, les termes à support dans  $KZ(g_{n-2, \mu}^0)^{-1}$  provenant de  $\begin{pmatrix} 1 & p^{n-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_{n-2} - f_{n-2}$  sont de la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 & p^{n-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [g_{n-2, \mu}^0, v_\mu] - [g_{n-2, \mu}^0, v_\mu] = \left[ g_{n-2, \mu}^0, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_\mu - v_\mu \right]$$

pour des  $v_\mu$  dans  $\bigoplus_{i=0}^r \bar{\mathbb{F}}_p x^{r-i} y^i$ . Supposons  $r \geq 1$ , alors  $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} v_\mu - v_\mu \in \bigoplus_{i=0}^{r-1} \bar{\mathbb{F}}_p x^{r-i} y^i$ . Les  $[g_{n-2,\mu}^0, v_\mu]$  apparaissant dans  $c^0 Y$  doivent donc aussi vérifier  $v_\mu \in \bigoplus_{i=0}^{r-1} \bar{\mathbb{F}}_p x^{r-i} y^i$ . La formule (14) force  $c^0 = 0$ . Supposons  $r = 0$ . Un calcul montre qu'alors  $\begin{pmatrix} 1 & p^{n-2} \\ & 1 \end{pmatrix} f_{n-2} - f_{n-2} = 0$  puis  $Y = T([\text{Id}, 1]) - [\alpha, 1]$  si  $n = 3$  et  $Y = T(\sum_{\mu \in I_{n-3}} [g_{n-3,\mu}^0, 1])$  si  $n \geq 4$ . Ceci ne donne rien sur  $c^0$ . On fait alors agir  $\begin{pmatrix} 1 & p^{n-3} \\ & 1 \end{pmatrix} \in I(1)$ . Un calcul analogue à (14) utilisant les Lemmes 3.1.8 et 3.1.7 montre que  $\begin{pmatrix} 1 & p^{n-3} \\ & 1 \end{pmatrix} X_n^0 - X_n^0 - Y \in T(S_{n-1}^0)$  où :

$$Y = \sum_{\mu \in I_{n-2}} \frac{(\mu_{n-3}-1)^p + 1 - \mu_{n-3}^p}{p} [g_{n-2,\mu}^0, 1] = \sum_{\mu \in I_{n-3}} \sum_{\lambda \in I_1} \frac{(\lambda-1)^p + 1 - \lambda^p}{p} [g_{n-2,\mu+p^{n-3}\lambda}^0, 1]$$

et

$$c^0 Y + \begin{pmatrix} 1 & p^{n-3} \\ & 1 \end{pmatrix} f_{n-2} - f_{n-2} \in T(S_{n-1}^1) + T(B_{n-3}) + B_{n-3} + S_n^1.$$

Ecrivons :

$$f_{n-2} = \sum_{\mu \in I_{n-3}} \sum_{\lambda \in I_1} c_\mu(\lambda) [g_{n-2,\mu+p^{n-3}\lambda}^0, 1] + f_{n-2}^1$$

avec  $c_\mu(X) \in \bar{\mathbb{F}}_p[X]$  de degré  $\leq p - 1$  (Lemme 3.1.6) et  $f_{n-2}^1 \in S_{n-2}^1$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu \in I_{n-3}} \sum_{\lambda \in I_1} \left( c^0 \frac{(\lambda-1)^p + 1 - \lambda^p}{p} + c_\mu(\lambda-1) - c_\mu(\lambda) \right) [g_{n-2,\mu+p^{n-3}\lambda}^0, 1] \\ & \in T(B_{n-3}^0) + B_{n-3} + S_n^1 + S_{n-2}^1. \end{aligned}$$

Un examen des supports et la formule (5) montrent que le polynôme :

$$c^0 \frac{(X-1)^p + 1 - X^p}{p} + c_\mu(X-1) - c_\mu(X) = -c^0 X^{p-1} + P(X),$$

où  $P(X)$  est de degré  $\leq p - 2$ , doit être constant. Cela force encore  $c^0 = 0$ . Finalement, dans tous les cas on a  $c^0 = 0$  et  $f = c^1 X_n^1 + f_{n-1} + f_{n-2} + \text{etc}$ . En appliquant le raisonnement précédent à  $\beta^{-1} f$  (qui vérifie encore  $g\beta^{-1} f - \beta^{-1} f \in T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r)$  pour tout  $g \in I(1)$  puisque  $\beta^{-1}$  normalise  $I(1)$ ), on obtient de même  $c^1 = 0$ , d'où  $f_n = 0$ . Par récurrence descendante sur le support de  $f$  modulo l'image de  $T$ , on est ainsi ramené au cas  $n = 2$ . Comme précédemment, on écrit alors  $f = f_2 + f_1 + f_0$  avec pour tout  $g \in I(1)$  :

$$g(f_2) - f_2 + g(f_1) - f_1 + g(f_0) - f_0 \in T(B_1).$$

Par le (ii) de la proposition 3.2.1 appliqué à  $f_2$ , quitte à modifier  $f_0$  on peut supposer  $f_2 = c^0 X_2^0 + c^1 X_2^1$ . Le même calcul que pour  $n \geq 3$  donne  $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} X_2^0 - X_2^0 - Y \in T(S_1^0)$  où  $Y = (-1)^r (r+1) [\text{Id}, y^r + x(*)]$ ,  $*$  étant un polynôme homogène en  $x$  et  $y$  de degré  $r - 1$  (nul si  $r = 0$ ). On a ainsi :

$$c^0 Y + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_1 - f_1 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_0 - f_0 \in T(S_1^1) + T(S_0) + S_2^1.$$

Les termes à support dans la classe  $KZ$  qui apparaissent à droite proviennent de  $T(S_0^1) \subset T(S_0)$  et leur somme est encore de la forme  $\lambda[\text{Id}, x^r]$  pour un  $\lambda \in \bar{\mathbf{F}}_p$ . Les termes à support dans la classe  $KZ$  qui apparaissent à gauche proviennent de  $Y$  et de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_0 - f_0$ . Pour  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_0 - f_0$ , leur somme est de la forme  $[\text{Id}, v]$  avec  $v \in \bigoplus_{i=0}^{r-1} \bar{\mathbf{F}}_p x^{r-i} y^i$  et le même raisonnement que dans le cas  $n \geq 3$  pour  $r \neq 0$  fournit  $c^0 = 0$ , puis  $c^1 = 0$  ce qui achève la preuve dans ce cas. Reste le cas  $r = 0$ , mais un calcul montre que  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [g_{1,\lambda}^1, 1] - [g_{1,\lambda}^1, 1] = 0$  pour tout  $\lambda \in I_1$ . Donc  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_1 - f_1$  est à support dans  $S_1^0$ . Comme dans ce cas  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_0 - f_0 = 0$ , on obtient  $c^0 Y \in T(S_1^1) + T(S_0) + S_2^1 + S_1^0$  avec  $Y = [\text{Id}, 1]$ . Un examen attentif des supports montre que cela entraîne  $c^0 = 0$ , puis  $c^1 = 0$  en remplaçant  $f$  par  $\beta^{-1}f$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

**THÉORÈME 3.2.4.** *Supposons  $r \leq p - 2$  et notons  $\overline{[\text{Id}, x^r]}$  (resp.  $\overline{[\alpha, y^r]}$ ) l'image de  $[\text{Id}, x^r]$  (resp.  $[\alpha, y^r]$ ) dans  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r / (T)$ . On a :*

$$\left( \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r)} \right)^{I(1)} = \bar{\mathbf{F}}_p \overline{[\text{Id}, x^r]} \oplus \bar{\mathbf{F}}_p \overline{[\alpha, y^r]}.$$

*Démonstration.* Il est d'abord clair que la famille  $(\overline{[\text{Id}, x^r]}, \overline{[\alpha, y^r]})$  est libre sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  (aucune combinaison linéaire de  $[\text{Id}, x^r]$  et  $[\alpha, y^r]$  ne peut être dans l'image de  $T$  pour des questions de support). Soit  $f \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma_r$  tel que  $gf - f \in T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r)$  pour tout  $g \in I(1)$ . Par la Proposition 3.2.3, quitte à modifier  $f$  par un élément dans l'image de  $T$ , on peut supposer que  $f$  est à support dans  $B_1$ . Par la Proposition 3.2.1, quitte à modifier encore  $f$  par un tel élément, on peut écrire :

$$f = c^0 X_1^0 + c^1 X_1^1 + [\text{Id}, v^0] + [\alpha, v^1]$$

où  $(c^0, c^1) \in \bar{\mathbf{F}}_p^2$  et  $(v^0, v^1) \in V_{\sigma_r}^2$ . Un calcul donne en utilisant les formules (7) et (9) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_1^0 - X_1^0 &= \sum_{\lambda \in I_1} ((\lambda - 1)^{r+1} - \lambda^{r+1}) [g_{1,\lambda}^0, x^r] \\ &= T \left( \left[ \text{Id}, (-1)^{r+1} \sum_{i=0}^r \binom{r+1}{i} x^{r-i} y^i \right] \right) - [\alpha, (-1)^{r+1} (r+1) y^r]. \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f - f \in T(S_0)$ . Comme  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\alpha, v^1] - [\alpha, v^1] = 0$ , on obtient :

$$-c^0 [\alpha, (-1)^{r+1} (r+1) y^r] + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c^1 X_1^1 - c^1 X_1^1 + \left[ \text{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v^0 - v^0 \right] = T(f_0)$$



où  $f_0 = [\text{Id}, w^0] + [\alpha, w^1] \in S_0$  ( $(w^0, w^1) \in V_{\sigma_r}^2$ ). Comme il n’y a pas de termes à support dans les classes  $KZ(g_{1,\lambda}^0)^{-1}$  ( $\lambda \in I_1$ ) dans le membre de gauche, il n’y en a pas non plus dans  $T(f_0)$ , ce qui entraîne  $w^0 = 0$  par la formule (7) (et le Corollaire 3.1.2). Mais comme dans  $T([\alpha, w^1])$  il n’y a pas de termes à support dans la classe  $KZ\alpha^{-1}$ , on a  $c^0[\alpha, (-1)^{r+1}(r+1)y^r] = 0$  d’où  $c^0 = 0$  puisque  $r \leq p - 2$ . Le même raisonnement appliqué à  $\beta^{-1}f$  donne  $c^1 = 0$ . On a donc  $f = [\text{Id}, v^0] + [\alpha, v^1]$  et  $g([\text{Id}, v^0] + [\alpha, v^1]) - [\text{Id}, v^0] - [\alpha, v^1] \in T(S_0)$  pour tout  $g \in I(1)$ . Cela entraîne facilement  $g([\text{Id}, v^0]) = [\text{Id}, v^0]$  et  $g([\alpha, v^1]) = [\alpha, v^1]$  i.e.  $v^0 \in V_{\sigma_r}^{I(1)}$  et  $\sigma_r(w)(v^1) \in V_{\sigma_r}^{I(1)}$  soit finalement  $v^0 \in \bar{\mathbf{F}}_p x^r$  et  $v^1 \in \bar{\mathbf{F}}_p y^r$ .  $\square$

*Remarque 3.2.5.* Le théorème 3.2.4 est encore vrai pour  $r = p - 1$  comme conséquence de l’entrelacement entre  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_0 / (T)$  et  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1} / (T)$ : voir section suivante.

#### 4. Preuve Des Résultats Principaux

##### 4.1.

**COROLLAIRE 4.1.1.** *Supposons  $r \leq p - 2$ , la représentation  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r / (T)$  est irréductible.*

*Démonstration.* Soit  $V \subset \text{ind}_{KZ}^G \sigma_r / (T)$  une sous- $G$ -représentation non nulle. Puisque  $I(1)$  est un pro- $p$ -groupe,  $V^{I(1)} \neq 0$  (cf. [1] par exemple) et par 3.2.4, il existe  $(c^0, c^1) \in \bar{\mathbf{F}}_p^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tel que  $c^0 \overline{[\text{Id}, x^r]} + c^1 \overline{[\alpha, y^r]} \in V$ . Si  $c^0 = 0$  (resp.  $c^1 = 0$ ), alors  $V = \text{ind}_{KZ}^G \sigma_r / (T)$  puisque  $[\alpha, y^r]$  (resp.  $[\text{Id}, x^r]$ ) engendre  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r$  (car  $\sigma_r$  est irréductible). Supposons  $c^0 \neq 0$  et  $c^1 \neq 0$ . Quitte à renormaliser, on peut prendre  $c^0 = 1$ . Si  $r \neq 0$ , soit  $\lambda \in \mathbf{F}_p^\times$  tel que  $\lambda^r \neq 1$ . On a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} (\overline{[\text{Id}, x^r]} + c^1 \overline{[\alpha, y^r]}) \in V$$

soit:

$$\begin{aligned} \overline{[\text{Id}, x^r]} + \lambda^r c^1 \overline{[\alpha, y^r]} &\in V, \\ \overline{[\text{Id}, x^r]} + c^1 \overline{[\alpha, y^r]} &\in V \end{aligned}$$

d’où on déduit  $\overline{[\alpha, y^r]} \in V$ . Donc on a encore  $V = \text{ind}_{KZ}^G \sigma_r / (T)$ . Si  $r = 0$ , pour  $\lambda \in I_1$  soit  $g_\lambda \in K$  tel que  $g_\lambda \alpha KZ = g_{1,\lambda}^0 KZ$ . On a:

$$\overline{[\text{Id}, 1]} + c^1 \overline{[\alpha, 1]} + \sum_{\lambda \in I_1} g_\lambda (\overline{[\text{Id}, 1]} + c^1 \overline{[\alpha, 1]}) \in V$$

soit:

$$(p+1)\overline{[\text{Id}, 1]} + c^1 \left( \overline{[\alpha, 1]} + \sum_{\lambda \in I_1} \overline{[g_{1,\lambda}^0, 1]} \right) = \overline{[\text{Id}, 1]} + c^1 T(\overline{[\text{Id}, 1]}) = \overline{[\text{Id}, 1]} \in V$$

et  $V$  est encore tout. □

Soit  $\omega: \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_p^\times$  le caractère lisse défini par  $\omega(p) = 1$  et  $\omega(x) = \bar{x}$  si  $x \in \mathbf{Z}_p^\times$  ( $\bar{x}$  est la réduction modulo  $p$  de  $x$ ).

**PROPOSITION 4.1.2.** *Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . La sous-KZ-représentation  $\sigma'_r$  de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1-r}/(T) \otimes (\omega^r \circ \text{dét})$  engendrée par l'image de  $[\alpha, y^{p-1-r}]$  est isomorphe à  $\sigma_r$ .*

*Démonstration.* Soit  $\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \in I$  et  $\lambda \in I_1 \setminus \{0\}$ , un calcul donne (dans la représentation  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1-r}) \otimes (\omega^r \circ \text{dét})$ ):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} [\alpha, y^{p-1-r}] &= \bar{a}^r \bar{d}^r \left[ \alpha, \begin{pmatrix} a & pb \\ c & d \end{pmatrix} y^{p-1-r} \right] \\ &= \bar{a}^r [\alpha, y^{p-1-r}] \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} [\alpha, y^{p-1-r}] &= \left[ g_{1,\lambda^{-1}}^0, \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & p \end{pmatrix} y^{p-1-r} \right] \\ &= (-\lambda)^r [g_{1,\lambda^{-1}}^0, x^{p-1-r}] \\ w[\alpha, y^{p-1-r}] &= (-1)^r [g_{1,0}^0, x^{p-1-r}]. \end{aligned} \tag{15}$$

Comme  $K = \prod_{\lambda \in I_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} I \prod wI$ ,  $\sigma'_r$  a donc pour espace  $V_{\sigma'_r}$  sous-jacent l'image de  $\bigoplus_{\lambda \in I_1} \bar{\mathbf{F}}_p [g_{1,\lambda}^0, x^{p-1-r}] \oplus \bar{\mathbf{F}}_p [\alpha, y^{p-1-r}]$ . Supposons d'abord  $r = 0$ , il résulte de la formule (7) et des Lemmes 3.1.1 et 3.1.6 que:

$$\bigoplus_{\lambda \in I_1} \bar{\mathbf{F}}_p [g_{1,\lambda}^0, x^{p-1}] \subset T(S_0^0) + \bar{\mathbf{F}}_p [\alpha, y^{p-1}]$$

et  $V_{\sigma'_0}$  est de dimension 1, engendré par l'image  $\overline{[\alpha, y^{p-1}]}$  de  $[\alpha, y^{p-1}]$ . Donc  $\sigma'_0$  est un caractère  $(\text{dét})^s$  pour un  $s \in \{0, \dots, p-2\}$ . Mais comme  $I$  agit trivialement sur  $\overline{[\alpha, y^{p-1}]}$  (cf. formule (15)), on a  $s = 0$  et  $\sigma'_0 = \sigma_0$ . Supposons maintenant  $r \neq 0$  i.e.  $p-1-r \leq p-2$ . Soit  $f \in (\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1-r}) \otimes (\omega^r \circ \text{dét})$  de support dans  $S_0^0$  et non nul. Pour des raisons de support, on a:

$$f \notin \sum_{\lambda \in I_1} \bar{\mathbf{F}}_p [g_{1,\lambda}^0, x^{p-1-r}] + \bar{\mathbf{F}}_p [\alpha, y^{p-1-r}] + T(S_0).$$

On en déduit:

$$V_{\sigma'_r} \cap \overline{(\bar{\mathbf{F}}_p [\text{Id}, x^{p-1-r}] \oplus \bar{\mathbf{F}}_p [\alpha, y^{p-1-r}])} = \overline{\bar{\mathbf{F}}_p [\alpha, y^{p-1-r}]}$$

et donc, d'après 3.2.4,  $V_{\sigma'_r}^{(1)} = \overline{\bar{\mathbf{F}}_p [\alpha, y^{p-1-r}]}$ . Soit  $\sigma''_r \subset \sigma'_r$  une sous- $K$ -représentation non nulle. On a  $0 \neq V_{\sigma''_r}^{(1)} \subset V_{\sigma'_r}^{(1)} = \overline{\bar{\mathbf{F}}_p [\alpha, y^{p-1-r}]}$  ce qui entraîne  $V_{\sigma''_r}^{(1)} = \overline{\bar{\mathbf{F}}_p [\alpha, y^{p-1-r}]}$ , donc  $\sigma''_r \simeq \sigma'_r$  puisque  $\bar{\mathbf{F}}_p [\alpha, y^{p-1-r}]$  engendre  $\sigma'_r$ . La représentation  $\sigma'_r$  est donc irréductible. Soit  $c(\infty) \in \bar{\mathbf{F}}_p$  et  $(c(\lambda))_{\lambda \in I_1} \in \bar{\mathbf{F}}_p^p$ . D'après la formule (7) et les Lemmes 3.1.1 et 3.1.5, on a  $c(\infty)[\alpha, y^{p-1-r}] + \sum_{\lambda \in I_1} c(\lambda)[g_{1,\lambda}^0, x^{p-1-r}] \in T(S_0)$  si et

seulement si le polynôme en  $X$  associé à  $(c(\lambda))_{\lambda \in I_1}$  par le Lemme 3.1.6 est de degré  $\leq p - 1 - r$  et a  $c(\infty)$  comme coefficient de  $X^{p-1-r}$ . Comme l'espace des polynômes de  $\bar{\mathbb{F}}_p[X]$  de degré  $\leq p - 1 - r$  est de dimension  $p - r$ , on obtient  $\dim(V_{\sigma'_r}) = p + 1 - (p - r) = r + 1$ . La classification des représentations irréductibles de dimension finie de  $K$  sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$  (voir [2]) force alors  $\sigma'_r \simeq \sigma_r \otimes (\det)^s$  pour un  $s \in \{0, \dots, p - 2\}$ . L'action de  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I$  sur  $[\alpha, y^{p-1-r}]$  montre qu'on doit avoir  $s = 0$  i.e.  $\sigma'_r \simeq \sigma_r$ .  $\square$

**COROLLAIRE 4.1.3.** *Soit  $r \in \{0, \dots, p - 1\}$ , il existe un (unique) isomorphisme  $G$ -équivariant:*

$$\psi_r : \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r)} \xrightarrow{\sim} \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1-r}}{T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1-r})} \otimes (\omega^r \circ \det)$$

tel que  $\psi_r(\overline{[\text{Id}, x^r]}) = \overline{[\alpha, y^{p-1-r}]}$ .

*Démonstration.* Il résulte de la Proposition 4.1.2 et de la réciprocity de Frobenius [2] qu'envoyer  $[\text{Id}, x^r]$  sur  $[\alpha, y^{p-1-r}]$  induit un morphisme  $G$ -équivariant surjectif:

$$\psi_r : \text{ind}_{KZ}^G \sigma_r \twoheadrightarrow \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1-r}}{(T)} \otimes (\omega^r \circ \det).$$

Supposons d'abord  $r \notin \{0, p - 1\}$ . Par 4.1.1:

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1-r}}{(T)} \otimes (\omega^r \circ \det)$$

est un quotient irréductible supersingulier de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r$ . D'après le Théorème 2.7.1,  $\psi_r$  se factorise forcément par  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r / (T)$  qui est encore irréductible, d'où le résultat dans ce cas. Pour  $r = 0$ , on a:

$$\begin{aligned} \psi_0(T([\text{Id}, 1])) &= \psi_0([\alpha, 1] + \sum_{\lambda \in I_1} [g_{1,\lambda}^0, 1]) \\ &= \beta \psi_0([\text{Id}, 1]) + \sum_{\lambda \in I_1} g_{1,\lambda}^0 \psi_0([\text{Id}, 1]) \\ &= \overline{[w, y^{p-1}]} + \sum_{\lambda \in I_1} \overline{\left[ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y^{p-1} \right]} \\ &= \overline{[\text{Id}, x^{p-1}]} + \overline{\left[ \text{Id}, \sum_{\lambda \in I_1} (\lambda x + y)^{p-1} \right]} \\ &= \overline{[\text{Id}, x^{p-1}]} + \overline{\left[ \text{Id}, \left( \sum_{\lambda \in I_1} \lambda^{p-1} \right) x^{p-1} \right]} = 0, \end{aligned}$$

donc  $\psi_0$  se factorise par  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_0 / (T)$  qui est irréductible, d'où le résultat dans ce cas. Pour  $r = p - 1$ , on remarque que  $\psi_{p-1} = \psi_0^{-1}$ . □

**COROLLAIRE 4.1.4.** *La représentation  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1} / (T)$  est irréductible et:*

$$\left( \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1}}{(T)} \right)^{(1)} = \overline{\mathbf{F}_p[\text{Id}, x^{p-1}]} \oplus \overline{\mathbf{F}_p[\alpha, y^{p-1}]}.$$

*Démonstration.* Découle de 4.1.1 et 4.1.3. □

Rappelons (cf. [2]) que pour tout  $r \in \{0, \dots, p - 1\}$ , on a:

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{(T)} \xrightarrow{\sim} \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{(T)} \otimes (\mu_{-1} \circ \det)$$

$$[g, v] \mapsto \mu_{-1}(\det(g)) [g, v].$$

**COROLLAIRE 4.1.5.** *Les seules équivalences entre les représentations super-singulières de  $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  sont les suivantes ( $r \in \{0, \dots, p - 1\}$  et  $\chi: \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbf{F}_p^\times}$ ):*

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r)} \otimes (\chi \circ \det) \xrightarrow{\sim} \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r)} \otimes (\chi \mu_{-1} \circ \det),$$

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r)} \otimes (\chi \circ \det) \xrightarrow{\sim} \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1-r}}{T(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1-r})} \otimes (\chi \omega^r \circ \det).$$

*Démonstration.* On a déjà construit de telles équivalences, il s'agit de montrer qu'il n'y en a pas d'autres. Soit  $(r, r') \in \{0, \dots, p - 1\}^2$  et  $\chi, \chi'$  deux caractères tels que:

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{(T)} \otimes (\chi \circ \det) \simeq \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{r'}}{(T)} \otimes (\chi' \circ \det).$$

Quitte à tensoriser par  $\chi^{-1} \circ \det$ , on peut supposer  $\chi = 1$ . On écrit  $\chi' = \mu_\lambda \omega^{s'}$  où  $\lambda' \in \overline{\mathbf{F}_p^\times}$  et  $s' \in \{0, \dots, p - 2\}$ . L'égalité des caractères centraux entraîne  $\omega^r = \mu_{\lambda'^2} \omega^{r'+2s'}$  d'où  $\lambda'^2 = 1$  i.e.  $\lambda' \in \{-1, +1\}$  et on est ramené à:

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{(T)} \simeq \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{r'}}{(T)} \otimes (\omega^{s'} \circ \det)$$

avec  $s' \in \{0, \dots, p - 2\}$ . Notons que pour  $p = 2$  cela achève la preuve. Supposons  $p \neq 2$  dans la suite. D'après 3.2.4, on a  $[\text{Id}, x^r] \mapsto c^0 [\text{Id}, x^{r'}] + c^1 [\alpha, y^{r'}]$  pour  $(c^0, c^1) \in \overline{\mathbf{F}_p^2}$ . Si  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \in I$ , on a:

$$g[\overline{\text{Id}}, x^r] = \bar{a}^r[\overline{\text{Id}}, x^r], \quad g[\overline{\text{Id}}, x^{r'}] = \bar{a}^{r'+s'} \bar{d}^{s'}[\overline{\text{Id}}, x^{r'}] \quad \text{et} \quad g[\overline{\alpha}, y^{r'}] = \bar{a}^{s'} \bar{d}^{r'+s'}[\overline{\alpha}, y^{r'}].$$

Si  $c^0 \neq 0$  et  $c^1 \neq 0$ , cela force  $\bar{a}^r = \bar{a}^{r'+s'} \bar{d}^{s'} = \bar{a}^{s'} \bar{d}^{r'+s'}$  pour tout  $(\bar{a}, \bar{d}) \in (\mathbb{F}_p^\times)^2$  ce qui entraîne  $s' = 0$  et  $(r, r') \in \{(0, p-1), (p-1, 0)\}$ . Si  $c^1 = 0$ , cela force  $\bar{a}^r = \bar{a}^{r'+s'} \bar{d}^{s'}$  qui entraîne  $s' = 0$  et  $r = r'$  ou  $(r, r') \in \{(0, p-1), (p-1, 0)\}$ . Si  $c^0 = 0$ , cela force  $\bar{a}^r = \bar{a}^{s'} \bar{d}^{r'+s'}$  qui entraîne  $r' + s' \in \{0, p-1\}$  et soit  $s' = r$  soit  $(s', r) = (0, p-1)$ . Si  $r' + s' = 0$ , alors  $s' = 0, r' = 0$  et  $r = 0$  ou  $r = p-1$ . Si  $r' + s' = p-1$  et  $s' = 0$ , alors  $r' = p-1$  et  $r = 0$  ou  $r = p-1$ . Enfin, si  $r' + s' = p-1$  et  $s' \neq 0$ , alors  $s' = r$  et  $r' = p-1-r$ . □

**4.2.** On note  $G_p = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ ,  $I_p$  son sous-groupe d'inertie et on normalise l'injection du corps de classe local  $\iota: \mathbb{Q}_p^\times \hookrightarrow G_p^{\text{ab}}$  de telle sorte que les uniformisantes s'envoient sur les Frobenius géométriques. Grâce à  $\iota$ , on identifie les caractères (lisses) de  $\mathbb{Q}_p^\times$  dans  $\bar{\mathbb{F}}_p^\times$  et les caractères (finis) de  $G_p^{\text{ab}}$  dans  $\bar{\mathbb{F}}_p^\times$ .

**LEMME 4.2.1.** Soit  $\varepsilon: G_p^{\text{ab}} \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$  le caractère cyclotomique  $p$ -adique et  $\bar{\varepsilon}$  sa réduction modulo  $p$ . On a  $(\varepsilon \circ \iota)(p) = 1$  et  $\bar{\varepsilon} \circ \iota = \omega$ .

*Démonstration.* Résultat classique du corps de classe local (pour la normalisation précédente). Voir par exemple le §4 du chapitre III de [4]. □

Soit  $\omega_2: I_p \rightarrow \mu_{p^2-1}(\bar{\mathbb{Q}}_p^\times) \subset \bar{\mathbb{F}}_p^\times$  le caractère fondamental de niveau 2 de Serre défini par  $\omega_2(g) = (g(p^{1/(p^2-1)})) / (p^{1/(p^2-1)})$  si  $g \in I_p$ . On a  $\omega_2^{p^2-1} = 1$  et  $\omega_2^{p+1} = \omega|_{I_p}$ . Pour  $s \in \{0, \dots, p\}$ , on note  $\text{ind}(\omega_2^s)$  l'unique représentation irréductible de  $G_p$  de dimension 2 sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$  de déterminant  $\omega^s$  et dont la restriction à  $I_p$  est  $\omega_2^s \oplus \omega_2^{ps}$ .

**LEMME 4.2.2.** Soit  $(r, r') \in \{0, \dots, p-1\}^2$  et  $\chi, \chi': \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \bar{\mathbb{F}}_p^\times$  deux caractères (lisses). Alors  $(\text{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \chi \simeq (\text{ind}(\omega_2^{r'+1})) \otimes \chi'$  si et seulement si  $(r', \chi') = (r, \chi)$  ou  $(r', \chi') = (r, \chi\mu_{-1})$  ou  $(r', \chi') = (p-1-r, \chi\omega^r)$  ou  $(r', \chi') = (p-1-r, \chi\mu_{-1}\omega^r)$ .

*Démonstration.* On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'on a bien des isomorphismes pour les valeurs  $(r', \chi')$  données. Il reste à voir qu'il n'y en a pas d'autres. Soit  $(r, r')$  et  $(\chi, \chi')$  tels que  $(\text{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \chi \simeq (\text{ind}(\omega_2^{r'+1})) \otimes \chi'$ . Quitte à tensoriser par  $\chi^{-1}$ , on peut supposer  $\chi = 1$ . On écrit  $\chi' = \mu_{\lambda'} \omega^{s'}$  où  $\lambda' \in \bar{\mathbb{F}}_p^\times$  et  $s' \in \{0, \dots, p-2\}$ . L'égalité des déterminants entraîne  $\omega^{r+1} = \mu_{\lambda'} \omega^{r'+1+2s'}$  d'où  $\lambda'^2 = 1$  i.e.  $\lambda' \in \{-1, +1\}$  et on est ramené à  $\text{ind}(\omega_2^{r+1}) \simeq (\text{ind}(\omega_2^{r'+1})) \otimes \omega^{s'}$ . Quitte à inverser  $r$  et  $r'$  et à remplacer  $s'$  par  $p-1-s'$ , on peut supposer  $r' \geq r$  et, en restreignant à  $I_p$ , on a  $\omega_2^{r+1} = \omega_2^{r'+1+(p+1)s'}$  ou  $\omega_2^{r+1} = \omega_2^{pr'+p+(p+1)s'}$ . Le premier cas donne  $p^2-1 \mid r'-r+(p+1)s'$  qui force  $r' = r$  et  $s' = 0$ . Le deuxième cas donne  $p^2-1 \mid (p+1)(r'+s')+p-1-(r+r)$  qui entraîne  $p+1 \mid p-1-(r'+r)$  qui force  $r'+r = p-1$ . D'où  $p-1 \mid p-1+(s'-r)$  qui force  $s'-r \in \{-p+1, 0\}$ . Si  $s'-r = -p+1$ , alors  $s' = 0, r = p-1$  et  $r' = 0$ . Sinon  $s' = r$  et  $r' = p-1-r$ . □

Si  $(\pi, V)$  est une représentation lisse de  $G$  ou de  $KZ$  sur un  $\bar{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel  $V$ , on note  $(\pi^*, V)$  la représentation donnée par  $\pi^*(g) \cdot v \stackrel{\text{déf}}{=} \pi({}^\tau g^{-1}) \cdot v$  ( $v \in V, g \in G$  ou

$KZ$  et  ${}^{\tau}g$  désigne la transposée de  $g$  dans  $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . Rappelons que le dual de Cartier d'une représentation de  $G_p$  est son dual usuel tordu par  $\varepsilon$ .

**COROLLAIRE 4.2.3** *Il existe une (unique) bijection entre les classes d'isomorphisme de représentations supersingulières de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  et les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  de dimension 2 sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  telle que:*

$$\frac{\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{(T)} \otimes (\chi \circ \mathrm{dét}) \mapsto (\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \chi$$

pour tout  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et tout caractère  $\chi$ . De plus, cette bijection envoie  $(\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_r / (T))^*$  sur le dual de cartier de  $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ .

*Démonstration.* Pour la première assertion, il faut vérifier que deux représentations supersingulières dans la liste ci-dessus sont isomorphes si et seulement si les représentations galoisiennes associées le sont aussi. Cela découle de 4.1.5 et 4.2.2. Pour la deuxième assertion, il est clair d'après les définitions que l'application  $f \mapsto (g \mapsto f({}^{\tau}g^{-1}))$  induit un isomorphisme  $G$ -équivariant:

$$(\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_r)^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_r^*) \simeq (\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_r) \otimes (\omega^{-r} \circ \mathrm{dét}).$$

On épargne au lecteur la vérification du fait que cet isomorphisme induit par passage au quotient:

$$\left(\frac{\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{(T)}\right)^* \xrightarrow{\sim} \frac{\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{(T)} \otimes (\omega^{-r} \circ \mathrm{dét})$$

qui correspond bien à la représentation  $(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r-1})) \otimes \omega$ . □

On peut également définir une correspondance (motivée par les résultats de [3]) qui inclut les représentations semi-simples de dimension 2 de  $G_p$ :

**DÉFINITION 4.2.4.** Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $\lambda \in \bar{\mathbf{F}}_p$ ,  $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_p^\times$  un caractère lisse et  $[p-3-r]$  l'unique entier dans  $\{0, \dots, p-2\}$  congru à  $p-3-r$  modulo  $p-1$ . On appelle 'correspondance semi-simple modulo  $p$  pour  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ' la correspondance suivante entre classes d'isomorphisme de représentations semi-simples de  $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  de dimension 2 sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  et certaines classes d'isomorphisme de représentations lisses semi-simples de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$ :

(i) si  $\lambda = 0$ :

$$(\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \chi \longleftrightarrow \frac{\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{(T)} \otimes \chi$$

(ii) si  $\lambda \neq 0$ :

$$\begin{pmatrix} \omega^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \chi \longleftrightarrow \left( \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{(T-\lambda)} \right)^{ss} \otimes \chi \oplus \left( \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{[p-3-r]}}{(T-\lambda^{-1})} \otimes \omega^{r+1} \right)^{ss} \otimes \chi$$

où ‘ss’ signifie ‘semi-simplifiée’.

On a noté  $\chi$  au lieu de  $\chi \circ \det$  pour alléger l’énoncé. Rappelons que:

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{(T-\lambda)} \quad \text{et} \quad \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{[p-3-r]}}{(T-\lambda^{-1})}$$

sont génériquement irréductibles (voir §2.7) et que, vu la normalisation choisie, le caractère non ramifié  $\mu_\lambda$  côté  $G_p$  envoie le Frobenius arithmétique sur  $\lambda^{-1}$ . On laisse au lecteur le soin de vérifier à partir du Théorème 2.7.1 (et du corollaire 4.2.3) que l’existence d’un isomorphisme entre représentations de  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$  de cette liste entraîne l’existence d’un isomorphisme entre représentations galoisiennes associées et vice-versa. Ceci assure que la correspondance en 4.2.4 est bien définie.

*Remarque 4.2.5.* On montre dans [3] que les représentations de  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$  un peu bizarres qui apparaissent dans la Définition 4.2.4, à savoir les représentations:

$$\left( \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{(T-\lambda)} \right)^{ss} \oplus \left( \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{[p-3-r]}}{(T-\lambda^{-1})} \otimes \omega^{r+1} \right)^{ss},$$

apparaissent aussi comme réduction modulo  $p$  (semi-simplifiée) de représentations  $p$ -adiques simples de  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ , ce qui est la raison principale pour les introduire. Ces représentations ont génériquement une interprétation en termes d’induites paraboliques (cf. [2]):

$$\begin{aligned} \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r}{(T-\lambda)} &\simeq \text{ind}_B^G(\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \omega^r \mu_\lambda) \\ \frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{[p-3-r]}}{(T-\lambda^{-1})} \otimes \omega^{r+1} &\simeq \text{ind}_B^G((\omega^r \mu_\lambda)\omega \otimes (\mu_{\lambda^{-1}})\omega^{-1}) \end{aligned}$$

où  $B$  désigne le sous-groupe de Borel de  $G$ . On note qu’il s’agit précisément des séries principales dont on ‘aimerait qu’elles soient entrelacées mais qui ne le sont pas en  $\ell = p$ .

*Remarque 4.2.6.* Supposons  $F = \mathbf{F}_p((t))$ ,  $\varpi = t$  et considérons la représentation  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_0 / (T) = \text{ind}_{KZ}^G 1 / (T)$ . Alors, au moins pour  $p > 2$ , on peut montrer que l’image de l’élément  $X_n^0 = \sum_{\mu \in I_{n-1}} \sum_{\lambda \in I_1} \lambda [g_{n, \mu + t^{n-1} \lambda}^0, 1]$  est invariante sous  $I(1)$  lorsque  $n \geq 3$ . Cela entraîne que  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_0 / (T))^{I(1)}$  est de dimension infinie. Supposons  $F = \mathbf{Q}_{p^f}$  (l’unique extension non ramifiée de  $\mathbf{Q}_p$  de degré  $f$ ) avec  $f > 1$ ,  $\varpi = p$  et considérons encore  $\text{ind}_{KZ}^G 1 / (T)$ . Alors, au moins pour  $p > 2$ , on peut

montrer que l'image de l'élément  $X_n^0 = \sum_{\mu \in I_{n-1}} \sum_{\lambda \in I_1} \lambda [g_{n, \mu + p^{n-1} \lambda}^0, 1]$  est invariante sous  $I(1)$  lorsque  $n \geq 2$ . Cela entraîne que  $(\text{ind}_{KZ}^G \sigma_0 / (T))^{I(1)}$  est encore de dimension infinie. La raison pour laquelle la récurrence du §3.2 dans ce cas ne donne rien est que  $\sum_{\lambda \in \mathbf{F}} \lambda^{p-1} = 0$  dès que  $\mathbf{F} \neq \mathbf{F}_p$ .

## Références

1. Barthel, L. et Livné, R.: Modular representations of  $\text{GL}_2$  of a local field: the ordinary, unramified case, *J. Number Theory* **55** (1995), 1–27.
2. Barthel, L. et Livné, R.: Irreducible modular representations of  $\text{GL}_2$  of a local field, *Duke Math. J.* **75** (1994), 261–292.
3. Breuil, C.: Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  II, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), 23–58.
4. Neukirch, J.: *Class Field Theory*, Springer, Berlin, 1986.
5. Serre, J.-P.: *Arbres, amalgames,  $\text{SL}_2$* , *Astérisque* **46**, Soc. Math. de France, 1983.
6. Serre, J.-P.: *Corps locaux*, 3<sup>ième</sup> éd., Hermann, Paris, 1968.
7. Serre J.-P.: Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, *Invent. Math.* **15** (1972), 259–331.
8. Vignéras, M.-F.: Correspondance de Langlands semi-simple pour  $\text{GL}_n(F)$  modulo  $\ell \neq p$ , *Invent. Math.* **144** (2001), 177–223.
9. Vignéras, M.-F.: Representations modulo  $p$  of the  $p$ -adic group  $\text{GL}(2, F)$ , prépublication 2001.